ÜBER EIN SPECIELLES

GEBÜSCH VON FLÄCHEN

ZWEITER ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT

DER

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT VON

RICHARD KRAUSE,

AUS RATZDORF, PR. BRANDENBURG.

STRASSBURG,

BUCHDRUCKEREI VON R. SCHULTZ & COMP.

BERGER-LEVRAULT'S NACHFOLGER.

1879.

In der Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen, welche Hr. Professor Reye seiner «Geometrie der Lage» als Anhang beigefügt hat, ist die Theorie des allgemeinen Flächenbündels und des Flächengebüsches zweiter Ordnung dargelegt. Als sehr fruchtbar erweist sich daselbst die projective Beziehung, welche zwischen dem Flächengebüsche einerseits und einem räumlichen Systeme andrerseits hergestellt werden kann. An die Untersuchung des allgemeinen Falles schliessen sich Erörterungen über Gebüsche, deren Flächen eine besondere Lage zu einander haben, und zwar werden hauptsächlich die Fälle berücksichtigt, wo sämmtliche Flächen einen und denselben Punkt oder zwei Punkte gemein haben, und ferner, wo sie durch einen und denselben Kegelschnitt gehen.

Dieselben Gegenstände werden ausführlicher betrachtet und ergänzt von dem Herrn Gymnasiallehrer Meyer in der Abhandlung «Ueber Flächensysteme zweiter Ordnung» (Halle a. S., 1875).

In neuester Zeit hat der zuerst genannte Autor eine Fortsetzung seiner angeführten Arbeiten veröffentlicht in dem «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 86, unter dem Titel : «Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse und die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten». Es werden dort die Strahlensysteme zweiter Klasse untersucht, indem sie mittelst der Flächengebüsche, deren Flächen durch resp. 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 willkürlich angenommene Punkte gehen, auf gewöhnliche Strahlenbündel projectiv bezogen werden.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche

Gerade besitzen. Dasselbe ist deshalb von Interesse, weil manche Untersuchungen einfacher und daher anschaulicher werden; so lässt sich z. B. die Frage nach der Vertheilung der Hauptstrahlen im Raume leicht erledigen. Ferner enthält dieses specielle Gebüsch unendlich viele Ebenenpaare, die im allgemeinen Falle nicht auftreten. Hauptsächlich aber ist die Untersuchung unseres Gebüsches darum von Nutzen, weil sich mit Hülfe desselben andere Flächen, als in den übrigen Fällen, auf einfachere, hinlänglich bekannte abbilden lassen. Wir können nämlich nach dem Vorgange des Herrn Reye zwischen unserem Flächengebüsche und einem räumlichen Systeme eine projective Verwandtschaft herstellen. Durch dieselbe wird jeder willkürlich gewählten Fläche F_1 des letzteren eine zweite F in dem Flächengebüsche zugewiesen, so dass jedem Punkte von F_1 vier Punkte auf F entsprechen. Zu jedem Gebilde jedoch, welches in dem Flächengebüsche angenommen wird, erhalten wir im räumlichen Systeme ein zweites, so dass die zwischen ihren Punkten bestehende Beziehung eine eindeutige ist. So werden wir zeigen, dass jeder Ebene des Gebüsches eine geradlinige Fläche III. Ordnung in dem räumlichen Systeme entspricht und dass diese Fläche eindeutig auf die Ebene bezogen ist. Obgleich diese eindeutige Beziehung bereits von den Herren Cremona, Clebsch, Reye und neuerdings von Herrn Benno Klein eingehend untersucht worden ist, so sind wir doch in dieser Arbeit in der Kürze darauf zurückgekommen, weil wir von ihr Gebrauch machen und sie in verschiedener Hinsicht anders zu begründen hatten, als namentlich Herr Reye. Wir werden sodann zu mehreren geradlinigen Flächen vierter Ordnung geführt. Wir beschäftigen uns besonders mit derjenigen, deren Doppelpunkte in einer Raumcurve dritter Ordnung liegen und deren doppelt berührende Ebenen einen Büschel dritter Ordnung bilden. Diese Fläche ist eindeutig auf eine Regelfläche zweiter Ordnung bezogen, so dass also jedem Punkte der Fläche vierter Ordnung im Allgemeinen ein einziger Punkt der Regelfläche entspricht, und umgekehrt. Projiciren wir die Regelfläche zweiter Ordnung aus irgend einem ihrer Punkte auf eine beliebig gegebene Ebene,

so finden wir auf rein synthetischem Wege die nämliche ebene Abbildung der windschiefen Fläche vierter Ordnung, zu welcher Clebsch mit Hülfe der Analysis gelangt ist. —

Bei meiner Arbeit sind mir folgende Abhandlungen von wesentlichem Nutzen gewesen:

Clebsch. «Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen.» Math. Ann. Bd. II.

Cremona. «Sulle superficie gobbe di quarto grado.» Mem. dell' Accad. d. Bologna. Ser. II. t. VIII.

Benno Klein. «Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf einer Ebene.» Inaug.-Diss. Berlin 1876.

Meyer. «Ueber Flächensysteme zweiter Ordnung.» Jahresbericht d. Stadtgymn. zu Halle a. S. 1875.

Reye. «Geometrie der Lage.» Hannover 1866—68.

Salmon. «Analytische Geometrie des Raumes.» Bearb. v. Fiedler. Leipzig 1874.

Es sei mir noch an dieser Stelle gestattet, meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Reye, welcher mich auf das behandelte Problem aufmerksam machte, für die vielfache Anregung zum Studium der Geometrie der Lage meinen tief gefühlten Dank auszusprechen.

Strassburg i. E., im November 1878.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547015_0040

§ 1. Sätze über das allgemeine F^2-Gebüsch*.

Wir stellen im Folgenden diejenigen Sätze über das allgemeine Flächengebüsch zusammen, von denen wir öfter Gebrauch zu machen haben. Dieselben sind theils längst bekannt, theils zuerst von Herrn Reye a. a. O. ausgesprochen und bewiesen worden.

Zwei Flächen zweiter Ordnung bestimmen einen F^2-Büschel. Zu demselben gehört jede Fläche zweiter Ordnung, welche einen beliebigen Punkt des Raumes mit der Schnittcurve der beiden ersten verbindet. Die gemeinschaftliche Schnittcurve aller Flächen des Büschels heisst die Grundcurve desselben.

Nehmen wir eine dritte Fläche zweiter Ordnung hinzu, welche nicht dem von den beiden ersten bestimmten Büschel angehört, so liegt dieselbe mit jeder Fläche des ersten Büschels in einem neuen Büschel. Die Gesammtheit der Flächen aller dieser neuen Büschel führt den Namen F^2-Bündel.

Vier Flächen zweiter Ordnung, welche nicht in demselben Bündel liegen, bestimmen ein F^2-Gebüsch. Wir rechnen zu demselben den F^2-Bündel, welcher durch drei der gegebenen Flächen entsteht, sowie jeden andern F^2-Bündel, welcher die vierte Fläche mit irgend zwei Flächen jenes ersten Bündels verbindet.

---

* Reye, Geom. der Lage, II. Abth., Anhang, §§ 165, 171, 174—177. — Meyer, Ueber Flächensyst., §§ 1, 4, 9, 10.

Wenn zwei Punkte P, P^1 conjugirt sind in Bezug auf vier beliebige Flächen eines F^2-Gebüsches, welche nicht dem nämlichen Bündel angehören, so sind sie hinsichtlich aller Flächen des Gebüsches conjugirt. Daraus folgt, dass ein Punkt auf allen Flächen eines Gebüsches liegt, wenn die vier ersten Flächen durch ihn hindurchgehen.

Um nun ein F^2-Gebüsch Σ auf ein räumliches System Σ_1 projectiv zu beziehen, nehmen wir irgend einen Punkt U an, dessen Polarebenen in Bezug auf vier beliebige Flächen von Σ nicht durch einen und denselben Punkt gehen, und weisen jeder Fläche des Gebüsches Σ diejenige Ebene des Systemes Σ_1 als entsprechende Ebene zu, welche von U die Polarebene ist bezüglich jener Fläche.*

Jeder Fläche zweiter Ordnung von Σ entspricht dann eine Ebene in Σ_1 eindeutig; jedem F^2-Büschel ein zu ihm projectiver Ebenenbüschel, und umgekehrt. Jeder Schnittlinie zweier Ebenen von Σ_1 weisen wir die Schnittcurve der entsprechenden Flächen zweiter Ordnung zu, dem Schnittpunkte dreier beliebiger Ebenen von Σ_1 diejenige Gruppe von Punkten, in denen sich die correspondirenden Flächen begegnen. Die Punkte einer solchen Gruppe heissen «associirte» Punkte.

Da im Raume Σ_1 zwei Punkte eine Gerade festlegen, so lassen sich stets zwei Gruppen associirter Punkte von Σ durch die Grundcurve eines F^2-Büschels verbinden. Drei Gruppen associirter Punkte liegen allemal auf einer Fläche zweiter Ordnung von Σ, da die drei homologen Punkte in Σ_1 durch eine Ebene verbunden werden können.

Ferner ergiebt sich:

Ein beliebiger Punkt des Raumes liegt auf unendlich vielen Flächen des Gebüsches, welche einen F^2-Bündel bilden.

---

* Anmerkung: Von unserer Betrachtung schliessen wir diejenigen F^2-Gebüsche aus, wo die Polarebenen eines jeden Punktes hinsichtlich sämmtlicher Flächen des Gebüsches durch einen und denselben Punkt gehen.

Zwei beliebige Punkte lassen sich durch unendlich viele Flächen des Gebüsches verbinden, welche einen F^2-Büschel bilden.

Drei willkürlich angenommene Punkte sind im Allgemeinen nur auf einer einzigen Fläche des Gebüsches enthalten; auch durch eine Gerade geht also im Allgemeinen eine Fläche desselben.

Jede Verbindungsgerade s von zwei associirten Punkten des Gebüsches heisst ein «Hauptstrahl» desselben. Ihr entspricht im räumlichen Systeme wieder eine Gerade s_1. Denn nehmen wir auf der Verbindungslinie s zweier associirten Punkte P, P^1 einen dritten Punkt Q an, so entspricht dem Punktenpaare ein und derselbe Punkt P_1 in Σ_1, und dem Punkte Q ein anderer Punkt Q_1. Dem Ebenenbüschel, dessen Axe $\overline{P_1Q_1}$ ist, sind die Flächen eines Büschels zugewiesen, welche drei und folglich alle Punkte von s enthalten. Es entspricht demnach dem Hauptstrahl s die Gerade $\overline{P_1Q_1}$. Ein Strahl s_1, dem in Σ ein Hauptstrahl s entspricht, trifft einen beliebigen Ebenenbüschel in einem geraden Gebilde. Der Hauptstrahl s wird von dem homologen F^2-Büschel in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, so dass je zwei zugeordnete Punkte auf derselben Fläche liegen, also einem und demselben Punkte auf s_1 entsprechen. Wir haben somit den Satz:

Jeder Hauptstrahl ist der Träger einer involutorischen Punktreihe, in welcher je zwei einander zugeordnete Punkte associirt sind.

Eine Gerade ist ein Hauptstrahl des Gebüsches, wenn ihr im räumlichen Systeme Σ_1 eine Gerade entspricht.

Einer beliebigen Geraden g des Gebüsches, in welcher keine associirten Punkte liegen, entspricht im Raume Σ_1 ein zu ihr projectiver Kegelschnitt. Denn die Fläche F^2 zweiter Ordnung von Σ, auf welcher drei Punkte von g liegen, enthält sämmtliche Punkte von g. Die entsprechende Linie g_1 in Σ_1 muss daher in der homologen Ebene φ_1 liegen; sie kann jedoch keine Gerade sein, weil nach Voraussetzung g kein Hauptstrahl ist. Nehmen wir nun zwei Ebenenbüschel

an, deren Axen a_1 und b_1 die ebene Curve g_1 in den Punkten A_1 resp. B_1 schneiden, und ordnen je zwei Ebenen einander zu, die sich im nämlichen Punkte von g_1 schneiden, so sind dadurch die Ebenenbüschel projectiv auf einander bezogen, weil die ihnen entsprechenden F^2-Büschel in Σ perspectiv auf das gerade Gebilde g bezogen sind. Die Ebenenbüschel a_1 und b_1 erzeugen eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung, von welcher g_1 ein ebener Schnitt ist, und zwar ist g_1 projectiv auf g bezogen.

§ 2. Ueber die Grundcurven der F^2-Büschel in dem speciellen F^2-Gebüsch.

Wir wollen von nun an unsere Aufmerksamkeit auf den besonderen Fall richten, wo drei und folglich sämmtliche Punkte einer Geraden auf allen Flächen des F^2-Gebüsches liegen. Diese Gerade nennen wir die «Basis» des F^2-Gebüsches und bezeichnen sie mit b.

Wir wollen jedoch die speciellen Fälle ausschliessen, wo entweder eine Fläche in eine doppelt zu zählende Ebene ausartet, oder wo die Doppellinie eines dem Gebüsch angehörigen Ebenenpaares in die Basis b fällt.

Die Grundcurve eines F^2-Büschels unseres Gebüsches besteht im Allgemeinen aus der Basis b und einer Raumcurve dritter Ordnung, welche mit b zwei Punkte gemein hat. Ein F^2-Bündel desselben wird von der Basis b und einer Gruppe von vier Punkten getragen. Nämlich zwei von den Flächen, welche den Bündel bestimmen, schneiden die dritte ausser in der Basis b noch in zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche die Strahlen derjenigen Regelschaar, zu welcher b gehört, zu gemeinschaftlichen Secanten haben; diese Raumcurven können höchstens vier gemeinschaftliche Punkte besitzen ohne zusammenzufallen*. Durch dieselben vier Punkte

---

* v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1860, p. 311. — Reye, a. a. O., p. 236.

gehen die Grundcurven aller zum Bündel gehörigen F^2-Büschel.

Wir sahen oben (§ 1), dass ein Hauptstrahl s einen F^2-Büschel des Gebüsches vollständig bestimmt. Die Grundcurve dieses Büschels besteht aus der Basis b, dem Hauptstrahle s, welcher b im Allgemeinen nicht schneidet, und zwei andern Geraden, die mit s und b zusammen ein windschiefes Viereck bilden.

Nehmen wir die beiden Punkte P und Q, durch welche wir einen Büschel von Σ festlegen wollen, in einer durch b gehenden Ebene, übrigens aber willkürlich an, so muss die Verbindungsgerade r von P und Q zu der Grundcurve des Büschels gehören, da sie drei Punkte aller Flächen desselben enthält. Die Grundcurve setzt sich daher aus b, r und einem Kegelschnitte zusammen. Im räumlichen Systeme Σ_1 entspricht ihr eine Gerade r_1. Das gerade Gebilde r liegt zu einem andern, beliebig gegebenen F^2-Büschel von Σ perspectiv, da r die Grundcurve desselben, nämlich b, schneidet. Die entsprechenden Punkte auf r_1 liegen in den Ebenen eines zum F^2-Büschel projectiven Ebenenbüschels. Wir schliessen daraus:

Jedem geraden Gebilde r, dessen Träger die Basis des Gebüsches schneidet, entspricht im Raume Σ_1 ein zu ihm projectives gerades Gebilde r_1*.

Jeder Punkt der Basis b entspricht allen Punkten des räumlichen Systems Σ_1 und ist allen Punkten von Σ associirt. Wir wollen jedoch hiervon absehen, weil sich aus dieser Zuordnung weder über die Lage der entsprechenden Punkte in Σ_1, noch über die der associirten im Gebüsche etwas folgern lässt.

---

* Vgl. Reye, a. a. O., § 197.

§ 3. Die dem F^2-Gebüsch angehörigen Kegelflächen und Ebenenpaare.

In jedem F^2-Büschel von Σ liegen im Allgemeinen zwei Kegelflächen, durch welche die Grundcurve des Büschels aus ihren beiden Schnittpunkten mit b projicirt wird.

Da drei beliebige Punkte stets durch eine Fläche des Gebüsches verbunden werden können, so folgt, wenn wir dieselben in eine Ebene des Büschels b legen, dass diese Ebene dem Gebüsch angehört. Die betreffende Fläche zerfällt somit in ein Ebenenpaar. Also:

Jede Ebene des Büschels b ist im Verein mit einer gewissen zweiten als eine zu dem Gebüsch gehörige Fläche zweiter Ordnung aufzufassen.

In jedem F^2-Bündel von Σ liegen vier Ebenenpaare. Denn wir können jeden der vier Knotenpunkte des Bündels mit b durch eine Ebene π verbinden. Der Ebene π ist die Verbindungsebene π' der drei andern Knotenpunkte associirt, so dass jedem beliebigen Punkte von π drei Punkte von π' associirt sind.

Nehmen wir drei Hauptstrahlen r, s, t an, die nicht in einer Ebene liegen, so möge eine Ebene π durch b dieselben in R, S, T treffen. Die associirte Ebene π' trifft die drei Geraden dann in drei Punkten R', S', T', welche in den involutorischen Punktreihen, deren Träger r, s und t sind (§ 1) den resp. Punkten R, S, T zugeordnet sind. Dreht sich nun π um b, so beschreiben R, S und T drei zu dem Ebenenbüschel b perspective, und daher zu einander projective Punktreihen; folglich müssen auch die von R', S' und T' beschriebenen Punktreihen, an denen π' entlang gleitet, zu einander projectiv sein. Daraus folgt:

Die den Ebenen des Büschels b associirten Ebenen bilden einen Büschel B^3 dritter Ordnung, welcher durch Association projectiv bezogen ist auf den Büschel b.

Den Specialfall, in welchem B^3 zerfällt, schliessen wir aus.

Wir nennen jede Schnittlinie zweier Ebenen eines Ebenenbüschels dritter Ordnung eine Axe desselben, und diejenige Axe, in welcher eine Ebene des Büschels von ihrer unendlich nahe benachbarten geschnitten wird, einen Berührungsstrahl.*

Alle Hauptstrahlen von Σ sind Axen des Ebenenbüschels B^3. Denn die drei zur Erzeugung von B^3 benutzten Hauptstrahlen können durch irgend welche andere ersetzt werden.

Da jedem Ebenenpaare $\pi\ \pi'$ von Σ eine Ebene π_1 in Σ_1 entspricht, und in jedem F^2-Bündel vier solche Paare liegen, so müssen durch jeden Punkt des räumlichen Systems vier Ebenen π_1 gehen. Aus diesem Grunde sagen wir, die Ebenen π_1 bilden einen Büschel B_1^4 vierter Ordnung.

Einer Axe s des Büschels B^3 entspricht in Σ_1 die Schnittlinie s_1 zweier Ebenen von B_1^4, d. h. s ist ein Hauptstrahl. Wir haben somit den Satz bewiesen:

Das System der Hauptstrahlen des Gebüsches ist identisch mit dem Axensystem des Ebenenbüschels B^3 dritter Ordnung, und die homologen Strahlen im räumlichen System sind die Schnittlinien der Ebenen des Büschels B_1^4 vierter Ordnung.

Von den Sätzen, welche nun die Lage der Hauptstrahlen charakterisiren, wollen wir nur die folgenden hervorheben:

Durch einen beliebigen Punkt gehen im Allgemeinen drei Hauptstrahlen. In einer beliebigen Ebene liegt ein Hauptstrahl; nur wenn die Ebene dem Büschel B^3 angehört, liegen in derselben unendlich viele Hauptstrahlen, welche einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden. Im letzteren Falle ist der Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher in derselben Ebene mit dem Centrum in der Basis b liegt, auf den genannten Strahlenbüschel zweiter Ordnung durch Association projectiv bezogen. Durch die Hauptstrahlen werden die Ebenen von B^3 collinear auf einander bezogen.

Wir fügen noch den Satz hinzu:

Jede Fläche des Gebüsches enthält im Allgemeinen drei Hauptstrahlen.

---

* Reye, a. a. O., Th. II, p. 77.

Denn eine beliebige Fläche F^2 des Gebüsches schneidet eine durch die Basis gelegte Ebene π in noch einer Geraden p. Alle durch p gehende Hauptstrahlen bilden eine geradlinige Fläche J^4 vierter Ordnung, welche p zur dreifachen Geraden hat*. Diese Fläche J^4 muss durch den Kegelschnitt p'^2 gehen, welchen F^2 aus der der Ebene π associirten Ebene π' herausschneidet. Denn weil J^4 aus Hauptstrahlen besteht, so müssen alle Punkte dieser Fläche durch Association zu zweien gepaart sein; die zu p gehörigen Punkte aber müssen auf π' und auf F^2 zugleich liegen. Da aber die Ebenen des Büschels B^3 durch die Hauptstrahlen collinear auf einander bezogen sind, so folgt, dass jede beliebige Ebene ϱ' von B^3 die Fläche J^4 in einem Kegelschnitt i'^2 trifft. Die Fläche F^2 schneidet ϱ' ebenfalls in einer Curve zweiter Ordnung f'^2. Diese Kegelschnitte i'^2 und f'^2 haben einen Punkt auf p gemein und ausserdem noch drei andere Punkte L, M und N. Wir verbinden einen derselben, L, durch eine Ebene mit p, welche den Kegelschnitt p'^2 ausserhalb p in einem Punkts L' schneidet. Die Linie $\overline{LL'}$ enthält drei Punkte von F^2, nämlich L, L' und einen Punkt von p, liegt also ganz auf F^2. $\overline{LL'}$ liegt aber auch auf J^4, denn sie enthält von J^4 fünf Punkte, nämlich die Punkte L, L' und den dreifach zu zählenden Punkt auf p. Entsprechend lassen sich noch zwei Gerade nachweisen, welche durch M resp. N gehen, und sowohl auf F^2 als auch auf J^4 enthalten sind. Da nun jede Erzeugende von J^4 ein Hauptstrahl ist, so ist unser Satz bewiesen.

Darüber, wie die den Hauptstrahlen entsprechenden Geraden s_1 in Σ_1 vertheilt sind, geben die Sätze Aufschluss:

Durch jeden Punkt des Raumes gehen sechs Strahlen s_1; in denselben schneiden sich vier Ebenen von B_1^4. In einer beliebigen Ebene liegen drei Strahlen s_1, nur in den Ebenen des Büschels B_1^4 selbst liegen deren unendlich viele, welche einen Strahlenbüschel dritter Ordnung bilden.

---

* Dieses folgt aus dem reciproken Satze. Reye, a. a. O., Th. II, p. 98 u. 99. — Vgl. in § 6 dieser Arbeit die Fläche X^4.

Jeder Geraden r in einer Ebene π des Büschels b entspricht in der homologen Ebene π_1 von B_1' eine zu ihr projective Gerade r_1. Daraus folgt:

Jede durch b gehende Ebene π ist collinear auf die ihr entsprechende π_1 von B_1' bezogen.

In jeder Geraden r_1 giebt es einen Punkt X_1, der nur dem Schnittpunkte X von r und b entspricht. Da nun zwei beliebige Strahlen r und s, welche die Basis in X und Y treffen, im Allgemeinen nicht durch eine Fläche zweiter Ordnung von Σ verbunden werden können, so liegen die homologen Geraden r_1 und s_1 nicht in einer Ebene; den Punkten X und Y entsprechen also zwei verschiedene Punkte X_1 und Y_1. Auch dann, wenn Y mit X zusammen fällt, können sich die homologen Punkte X_1 und X_1' nicht vereinigen, so lange als r und s auf verschiedenen Flächen des Gebüsches liegen. Wenn nun r und s derselben Fläche von Σ angehören und sich in demselben Punkte X von b begegnen, so können die entsprechenden Punkte X_1 und X_1' dennoch nicht zusammenfallen; ausgenommen, wenn in Σ die Geraden r, s und b in einer Ebene liegen. Legen wir nämlich eine Ebene durch X_1, so ist derselben in Σ eine Fläche zugeordnet, welche von r in keinem weiteren Punkte geschnitten wird; diese Fläche wird also im Punkte X von der Geraden r berührt. Wäre nun X_1 mit X_1' identisch, so müsste jeder durch X_1 gehenden Ebene eine Fläche entsprechen, welche in X von b, r und s berührt wird, d. h. eine Kegelfläche. Beachten wir, dass der Punkt X_1 mit jeder Geraden von Σ_1 durch eine Ebene verbunden werden kann, so würden wir zu dem Schlusse kommen, dass in jedem F^2-Büschel von Σ eine Kegelfläche existirte, deren Spitze in X liegt, was im Allgemeinen nicht eintreten kann. Wenn nun schliesslich r und s die Basis in verschiedenen Punkten X und Y schneiden, während sie auf derselben Fläche des Gebüsches liegen, und die Punkte X_1 und Y_1 fallen zusammen, so müsste jede Fläche des Gebüsches, welche mit einer Ebene des Büschels r_1 correspondirt, durch r gehen und ausserdem die Verbindungsebene $\overline{sb}$ im Punkte Y berühren. Das ist aber im Allgemeinen nicht der Fall.

Aus dem Gesagten folgt, dass jeder Ebene, welche zwei Punkte X_1 X_1' enthält, eine Kegelfläche mit dem Centrum X entspricht, dass also alle Kegelflächen, deren Mittelpunkt X ist, einen Büschel bilden. Alle Geraden durch X sind Tangenten dieser Kegelflächen; folglich müssen auf den entsprechenden projectiven Geraden in Σ_1 die Punkte X_1 in der Verbindungslinie x_1 der Punkte X_1 und X_1' liegen.

Jeder Punkt der Basis b ist Mittelpunkt eines dem Gebüsche angehörigen Büschels von Kegelflächen zweiter Ordnung; ihm entsprechen in Σ_1 die Punkte einer Geraden x_1.

Durch jeden Punkt X von b gehen drei Doppellinien von Ebenenpaaren des Gebüsches; das bedeutet für Σ_1:

Durch jede Gerade x_1 gehen drei Ebenen des Büschels B_1^4.

Zwei Gerade x_1 und y_1, welche zwei Punkten, X resp. Y, der Basis b entsprechen, können nicht in einer Ebene liegen. Denn dieser Ebene würde in Σ eine Kegelfläche gegenüberstehen, welche in X und in Y Doppelpunkte besitzt. Es wäre dann b die Doppellinie eines zum Gebüsch gehörigen Ebenenpaares, oder aber das Gebüsch enthielte eine doppelt zu zählende Ebene, Fälle, welche wir am Eingange unserer Untersuchung ausgeschlossen haben.

Zwei willkürlich angenommene Punkte in Σ bestimmen einen F^2-Büschel. Nehmen wir die Punkte in einer Ebene π durch b an und lassen sie unendlich nahe an b hinanrücken, so treten in den betreffenden Punkten von b zwei in π liegende Tangenten für die Punkte ein. Alle Flächen dieses Büschels werden nun von π in zwei verschiedenen Punkten der Basis berührt; dieses ist nur möglich, wenn die Flächen Kegel sind, welche also die Ebene π in allen Punkten von b berühren. Zu diesem Büschel gehört ein einziges Ebenenpaar, welches aus π und ihrer associirten Ebene π' besteht. Die Grundcurve des Büschels besteht aus der doppelt aufzufassenden Basis b und einem Kegelschnitt in π'. In Σ_1 geht durch die Axe b_1 nur eine einzige Ebene des Büschels B_1^4 vierter Ordnung.

Wir wollen jetzt in Σ zwei Büschel von Kegelflächen annehmen, deren Flächen die Ebenen π resp. ϱ längs b berühren. Die Grundcurven der beiden Büschel bestehen

aus b und je einem Kegelschnitt, p^2 resp. r^2, welcher in der zu π resp. ϱ associirten Ebene liegt. Eine willkürlich durch b gelegte Ebene ε schneidet p^2 und r^2 ausserhalb b nur noch in je einem Punkte P resp. R, folglich die Kegelflächenbüschel in je einem Strahlenbüschel erster Ordnung mit den Mittelpunkten P resp. R. Ordnen wir nun je zwei concentrisch liegende Flächen der beiden Büschel einander zu, so sind die beiden in der Ebene ε liegenden Strahlenbüschel P und R perspectiv auf b bezogen und folglich die F^2-Büschel projectiv auf einander. Im Raume Σ_1 haben wir demnach zwei Ebenenbüschel, p_1 und r_1, welche projectiv auf einander bezogen sind in der Weise, dass sich je zwei homologe Ebenen in einer Geraden x_1 schneiden, deren Punkte einem einzigen Punkte X von b entsprechen. Wir schliessen hieraus:

Jedem Punkte X von b entspricht in Σ_1 eine Gerade x_1, welche eine Regelschaar X_1^2 beschreibt, wenn X an b entlang gleitet. Jeder Leitstrahl von X_1^2 entspricht der Basis b und ist durch X_1^2 projectiv auf b bezogen.

Die Gerade x_1 würde nur in dem Falle eine Kegelfläche beschreiben, wenn p_1 und r_1 einen gemeinschaftlichen Punkt besässen. Ihrer Verbindungsebene entspräche alsdann eine Kegelfläche, welche von π und ϱ längs b berührt würde, was ausgeschlossen ist.

Beiläufig ergiebt sich:

Durch jeden Strahl der Regelschaar X_1^2 gehen drei Ebenen des Büschels B_1^4 vierter Ordnung, durch jeden Leitstrahl nur eine; folglich ist der Büschel von der zweiten Species*.

Die Ebenen in Σ_1, denen im Gebüsch Kegelflächen oder Ebenenpaare entsprechen, bilden einen Ebenenbündel zweiter Ordnung. In jeder Ebene desselben liegen diejenigen Punkte, welche der Basis b entsprechen, in zwei Geraden. In einer ganz willkürlichen Ebene von Σ_1 entspricht der Punktreihe b eine zu ihr projective Punktreihe zweiter Ordnung, welche auf der angenommenen Ebene durch die Regelschaar X_1^2 fixirt wird.

---

* Die Erzeugungsart von B_1^4 siehe in § 8 dieser Arbeit.

§ 4. Die Kernfläche des F^2-Gebüsches *.

Wenn zwei Punkte P,P' conjugirt sind in Bezug auf vier Flächen des Gebüsches, die in keinem F^2-Bündel liegen, so sind sie es in Bezug auf alle. Bekanntlich ist der geometrische Ort derjenigen Punktenpaare, welche in Bezug auf das F^2-Gebüsch conjugirt sind, eine Fläche K^4 vierter Ordnung, welche nach Steiner ** die Kernfläche des Gebüsches genannt wird.

Auf der Kernfläche liegen alle sich selbst conjugirten Punkte, nämlich die Punkte der Basis b; ferner die Doppellinien aller in Ebenenpaare zerfallenden Flächen zweiter Ordnung. Denn einem beliebigen Punkte P einer solchen Doppellinie ist in Bezug auf drei beliebige andere Flächen des Gebüsches ein Punkt P', in Bezug auf das Ebenenpaar aber jeder Punkt des Raumes und insbesondere auch P' conjugirt. Dem Punkte P ist demnach der Punkt P' conjugirt bezüglich aller Flächen des Gebüsches.

Da durch jeden Punkt der Basis b drei Ebenen des Büschels B^3 gehen, also auch drei Doppellinien von Ebenenpaaren, der Ebenenbüschel b aber auf B^3 durch Association projectiv bezogen ist (§ 3), so folgt:

Die Kernfläche K^4 ist eine geradlinige Fläche vierter Ordnung, welche durch einen Ebenenbüschel b erster Ordnung und einen dazu projectiven Ebenenbüschel B^3 dritter Ordnung erzeugt werden kann***. Dieselbe geht dreimal durch die Basis b.

Die drei Ebenenpaare, deren Doppellinien sich in einem Punkte X der Basis schneiden, bilden ein vollständiges Vierkant. Denn die Grundcurve des Büschels von Kegelflächen, dem jene drei Ebenenpaare angehören, besteht aus vier Geraden.

---

* Reye, a. a. O., § 172. — Meyer, Flächensyst., § 9. — Vgl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Th. II, p. 391.

** Steiner, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 53, p. 138.

*** Vgl. Salmon-Fiedler, a. a. O., Th. II, p. 373—374.

Jedes Ebenenpaar wird durch diejenigen zwei Erzeugenden von K^4 harmonisch getrennt, die mit seiner Doppellinie durch denselben Punkt von b gehen.

Die doppelt berührenden Ebenen von K^4 gehen zu dreien durch die Punkte der Basis b, jede derselben hat nämlich mit K^4 zwei Erzeugende und einen Kegelschnitt gemein*, und zwar geht der Kegelschnitt durch den Schnittpunkt der Erzeugenden, weil allgemein jede ebene Schnittcurve von K^4 in der dreifachen Geraden b einen dreifachen Punkt haben muss. Die beiden andern Schnittpunkte der Erzeugenden und des Kegelschnittes sind die Berührungspunkte.

Der von den doppelt berührenden Ebenen gebildete Büschel ist von der dritten Ordnung. Wenn derselbe in Büschel von niederer Ordnung zerfiele, so liesse sich mindestens eine Gerade g construiren, welche die Träger dieser Ebenenbüschel und die Basis b schneidet. In g würden sich dann drei doppelt berührende Ebenen der Fläche K^4 durchdringen, was nur möglich ist, wenn sich auch drei Ebenen des Büschels B^3 in dieser Geraden g schneiden. Dann würde aber auch der Ebenenbüschel B^3 zerfallen, was ausgeschlossen ist (§ 3). Wir haben folglich das Ergebniss:

Die doppelt berührenden Ebenen der Kernfläche K^4 bilden einen irreduciblen Ebenenbüschel dritter Ordnung.

Die Kernfläche K^4 ist eine Fläche vierter Ordnung von der Art, die Herr Cremona als die achte aufzählt**.

Wenden wir uns jetzt der Untersuchung der Punkte zu, welche der Kernfläche associirt sind. Im Allgemeinen findet man die associirten Punkte eines gegebenen, indem man drei beliebige Flächen von Σ hindurchlegt und dieselben zum Durchschnitt bringt. Um also zu einem Punkte S auf K^4 die associirten zu erhalten, bringen wir das durch S gehende Ebenenpaar $\pi\pi'$ mit zwei anderen durch S gehenden Flächen von Σ zum Durchschnitt. Die Ebene π, welche von beiden Flächen die Basis b enthält, schneidet dieselben ausserdem noch in je einer durch S gehenden Geraden.

---

* Cremona, Sulle superficie gobbe, § 2. — Vgl. § 10 dieser Arbeit.

** Cremona, a. a. O., § 9.

π' ferner hat mit den Flächen je einen ebenfalls durch S gehenden Kegelschnitt gemein. Da sich diese Kegelschnitte aber in einem Punkte von b treffen, so sind dem Punkte S nur zwei Punkte associirt. S selbst ist aber offenbar doppelt zu zählen, da die Schnittcurven jener Flächen zweiter Ordnung sämmtlich zweimal hindurchgehen.

Jeder Punkt S der Kernfläche ist sich selbst und ausserdem zwei anderen Punkten associirt.

Legen wir durch die Doppellinie p von $\pi\pi'$ eine Fläche des Gebüsches, so besteht die Grundcurve des hiermit bestimmten Büschels aus b, der doppelt aufzufassenden Geraden p und einer dritten Geraden in π'. Folglich ist jeder Erzeugenden von K^4 ein Hauptstrahl associirt.

In jeder Ebene π' ist der aus den Hauptstrahlen bestehende Büschel zweiter Ordnung durch Association projectiv bezogen auf den Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Centrum $b'\pi'$ (§ 3). Rückt nun ein Strahl des letzteren in die Lage p, so wird der associirte Strahl in π' durch die unendlich nahe benachbarte Ebene des Büschels B^3 ausgeschnitten; folglich ist der Doppellinie $\pi\pi'$ der Berührungsstrahl in π' associirt. D. h.:

Der Kernfläche K^4 ist die abwickelbare Fläche K'^4 vierter Ordnung associirt, welche von dem Ebenenbüschel B^3 dritter Ordnung eingehüllt wird.

In Σ_1 entspricht der Kernfläche K^4 die von dem Ebenenbüschel B_1^4 vierter Ordnung eingehüllte Fläche K^6_1 sechster Ordnung.

Man bestätigt, dass die Fläche K_1^6 von der sechsten Ordnung ist, indem man sie mit einer beliebigen Geraden von Σ_1 zum Durchschnitt bringt. Die fragliche Fläche wird von der Geraden in halb so vielen Punkten getroffen, wie die abwickelbare Fläche K'^4 in Σ von der homologen Grundcurve, weil jedem Punkte von K_1^6 zwei Punkte auf K'^4 entsprechen. Entlehnen wir der analytischen Geometrie den Satz, dass eine Fläche vierter Ordnung von einer Curve dritter Ordnung in zwölf Punkten geschnitten wird, so folgt, dass die abwickelbare Fläche K_1^6 in Σ_1 mit jeder beliebigen Geraden sechs Punkte gemein hat.

§ 5. Ueber die Kegelschnitte in Σ_1, denen in Σ Gerade entsprechen.

Einer beliebigen Geraden k von Σ ist in Σ_1 ein zu ihr projectiver Kegelschnitt k_1^2 zugewiesen (§ 1). In jeder Ebene von Σ_1 liegt eine einfach unendliche Schaar von solchen Kegelschnitten k_1^2, da auf jeder Fläche des Gebüsches eine einfach unendliche Schaar von Geraden liegt, welche b nicht schneiden. Eine Ausnahme machen nur die Ebenen des Bündels zweiter Ordnung, welche die Regelfläche X_1^2 berühren, weil ihnen Kegelflächen entsprechen, deren Mittelpunkte auf b liegen.

Durch jeden Punkt einer gegebenen Ebene gehen vier Kegelschnitte k_1^2 derselben, weil durch die vier entsprechenden Punkte in Σ vier verschiedene Gerade auf der homologen Regelfläche gezogen werden können, die b nicht schneiden.

Zwei beliebige Punkte im räumlichen System Σ_1 bestimmen im Allgemeinen sechzehn Kegelschnitte k_1^2, da in Σ die Punkte der beiden entsprechenden Gruppen durch sechzehn Gerade verbunden werden können, welche nicht Hauptstrahlen sind.

Ein beliebiges gerades Gebilde k des Gebüsches wird durch jeden F^2-Büschel desselben involutorisch gepaart. Dem entsprechend wird in Σ_1 auf dem zugeordneten Kegelschnitte k_1^2 eine involutorische Punktreihe durch den homologen Ebenenbüschel festgelegt; und zwar entspricht einem Ordnungspunkte wieder ein Ordnungspunkt. Jeder Fläche des Gebüsches, welche k berührt, entspricht eine Ebene, welche k_1^2 tangirt. Die Gerade k trifft nun die Kernfläche K^4 in vier Punkten, und durch jeden derselben geht eine Doppellinie eines Ebenenpaares, folglich muss auch k_1^2 von den vier zugeordneten Ebenen des Büschels B_1^4 berührt werden, so dass die Berührungspunkte auf K_1^6 liegen. Also:

Alle Kegelschnitte k_1^2 im räumlichen Systeme, denen im F^2-Gebüsch Gerade entsprechen, berühren die Fläche K_1^6 in vier Punkten*.

§ 6. Ueber diejenigen Flächen in Σ, welche beliebig in Σ_1 angenommenen Flächen entsprechen**.

In Folge der projectiven Beziehung zwischen Σ und Σ_1 entspricht jeder stetigen Aufeinanderfolge von irgendwelchen Gebilden des einen Systems wieder eine stetige Reihe von homologen Gebilden im andern Systeme. Die zwischen den Punkten dieser Gebilde bestehende Beziehung ist eine solche, dass mit jedem Punkte von Σ_1 eine Gruppe von vier associirten Punkten in Σ correspondirt.

Jeder im räumlichen Systeme Σ_1 angenommenen Fläche L_1^2 zweiter Ordnung entspricht in dem F^2-Gebüsche Σ eine Fläche L^4 vierter Ordnung.

Nämlich L^4 wird von einer beliebigen Geraden in eben so vielen Punkten getroffen, wie L_1^2 von dem entsprechenden Kegelschnitt in Σ_1, also im Allgemeinen in vier Punkten. Wir können L_1^2 auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke Ebenenbündel erster Ordnung erzeugen; folglich kann die Fläche L^4 auf unendlich viele Arten durch zwei reciproke F^2-Bündel erzeugt werden, deren Basispunkte auf L^4 liegen.

Jede Gerade x_1 der Regelschaar X_1^2 trifft L_1^2 in zwei Punkten; deshalb geht L^4 zweimal durch jeden Punkt X von b. Jedoch ist es nicht nothwendig, dass die Basis b in ihrer ganzen Ausdehnung als eigentliche Doppellinie von L^4 auftritt; es ist ein Theil isolirt, wenn nicht alle Strahlen von X_1^2 die Fläche L_1^2 in reellen Punkten treffen. Dass jede durch die Doppellinie b gelegte Ebene π nur noch einen

---

* Vgl. Reye, Strahlensysteme II. Classe (Journal f. d. r. u. a. M., Bd. 86, p. 88).

** Vgl. Reye, a. a. O., §§ 187, 188.

Kegelschnitt von L^4 ausser b enthalten kann, erkennt man daraus, dass jede Ebene π_1 des Büschels B_1^4, welche auf π collinear bezogen ist, die Fläche L_1^2 in einem Kegelschnitte durchdringt.

Einem beliebigen Kegelschnitte auf L_1^2 entspricht in Σ eine Raumcurve sechster Ordnung; in dieser Raumcurve und in der Basis b wird L^4 von der Fläche zweiter Ordnung geschnitten, welche der Kegelschnitt-Ebene entspricht.

Ist die Fläche G_1^2 zweiter Ordnung in Σ_1 eine geradlinige, so entspricht ihr eine Fläche vierter Ordnung G^4, welche durch zwei projective F^2-Büschel von Σ erzeugt werden kann. Die Fläche G^4 enthält zwei Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung, welche sämmtlich die Basis b zur gemeinschaftlichen Secante haben. Durch jeden Punkt X von b gehen zwei Raumcurven dritter Ordnung aus einer jeden Schaar, weil ein beliebiger Strahl der Regelschaar X_1^2 je zwei Strahlen der beiden auf G_1^2 liegenden Regelschaaren schneidet. Im Uebrigen treffen sich zwei beliebige Raumcurven derselben Schaar nicht, je zwei von verschiedenen Schaaren dagegen in einer Gruppe von vier associirten Punkten.

Wenn G_1^2 mit der Regelschaar X_1^2 eine Gerade x_1 gemein hat, so enthält G^4 drei Gerade, welche sich in einem Punkte X von b schneiden; dieselben bilden mit der Basis b die Grundcurve eines F^2-Büschels, dessen Flächen Kegel sind. (§ 3.)

Legen wir die Regelfläche G_1^2 durch zwei Gerade x_1 und y_1 von X_1^2, so enthält G^4 sechs Gerade, welche sich zu dreien in zwei Punkten X, Y von b treffen.

Der Regelfläche X_1^2 selbst entspricht in Σ eine Fläche X^4 vierter Ordnung, auf welcher die Grundcurven sämmtlicher Kegelflächenbüschel liegen, und zwar entsprechen jeder Geraden x_1 drei durch X gehende Gerade. Letztere bilden mit b ein Vierkant, dessen sechs Ebenen die drei durch X gehenden Ebenenpaare sind (§ 3). Jedem Leitstrahle der Regelschaar X_1^2 ferner entspricht auf der Fläche X^4 ein Kegelschnitt, der in einer Ebene des Büschels B^3 dritter Ordnung liegt und die Basis b schneidet. Wir haben das Resultat:

Der Regelfläche X_1^2 von Σ_1 entspricht in Σ eine geradlinige Fläche X^4 vierter Ordnung. Dieselbe enthält alle Axen des Ebenenbüschels B^3 dritter Ordnung, welche die Gerade b schneiden. Die Gerade b ist eine dreifache Leitlinie der Fläche X^4, und die Ebenen des Büschels B^3 dritter Ordnung berühren die Fläche doppelt.

Die Fläche X^4 gehört folglich zu derselben Art nach der Cremona'schen Klassification, wie die Kernfläche K^4 unseres F^2-Gebüsches.

Ueber die gegenseitige Lage von X^4 und K^4 finden wir: Beide Flächen X^4 und K^4 haben b zur dreifachen Geraden. Durch jeden Punkt X von b gehen drei-Erzeugende von X^4, welche mit b ein Vierkant bilden, dessen drei Paar Gegenflächen sich in drei Erzeugenden von K^4 schneiden.

Ist schliesslich die angenommene Fläche zweiter Ordnung von Σ_1 eine Kegelfläche, so enthält die Fläche vierter Ordnung nur eine Schaar von Raumcurven dritter Ordnung. Dem Doppelpunkte der Kegelfläche entsprechen vier Knotenpunkte, durch welche alle jene Raumcurven dritter Ordnung hindurchgehen. Diese Fläche vierter Ordnung kann erzeugt werden durch zwei projective F^2-Büschel, die in einem F^2-Bündel von Σ liegen.

Benutzen wir den Satz der analytischen Geometrie, wonach sich zwei Flächen von den Ordnungen m und n im Allgemeinen in einer Raumcurve $m.n^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden, und drei Flächen von den Ordnungen m, n und p im Allgemeinen $m.n.p$ Punkte gemein haben, so lassen sich die gefundenen Sätze verallgemeinern.

Einer in Σ_1 angenommenen Fläche F_1^n n^{ter} Ordnung entspricht eine Fläche F^{2n} von der Ordnung $2n$.

Denn eine beliebige Gerade schneidet die letztere Fläche in genau so vielen Punkten, wie der homologe Kegelschnitt die erstere, d. i. in $2.n$.

Die Fläche F^{2n} hat b zur n-fachen Geraden, weil F_1^n jede Gerade x_1 der Regelschaar X_1^2 in n Punkten trifft, welche sämmtlich einem und demselben Punkte X der Basis entsprechen.

Die Ebenen von B_1^4 sind collinear auf die Ebenen des Büschels b bezogen. Daher schneidet jede durch b gehende Ebene die Fläche F^{2n} noch in einer Curve von der Ordnung n; und zwar, wenn die Schnittcurven in den Ebenen von B_1^4 zerfallen, so zerfallen auch die Curven in den Ebenen des Büschels b in Curven von den gleichen Ordnungen.

Einem beliebigen ebenen Schnitte von F_1^n entspricht die Durchdringungscurve von F^{2n} mit einer Fläche zweiter Ordnung des Gebüsches. Dieselbe besteht aus der n-fachen Geraden b und einer Raumcurve von der Ordnung $3.n$. Jede Gerade der einen auf der Fläche zweiter Ordnung liegenden Regelschaar schneidet die Durchdringungscurve in $2.n$ Punkten, jede Gerade der Leitschaar in n Punkten.

§ 7. Associirte Gebilde des Gebüsches.

In Betreff der Bezeichnungsweise schicken wir voraus, dass wir jedes Gebilde, welches einem gegebenen associirt ist, mit demselben Buchstaben bezeichnen, wie das erstere, und mit dem oberen Index $'$ versehen.

Je zwei Punkte, welche einem dritten associirt sind, sind sich selbst associirt.

Alle Punkte von Σ gruppiren sich durch Association zu vieren. Wir wollen ein Gebilde, dessen Punkte durch Association zu Gruppen von n sich vereinigen, sich selbst $(n\text{-}1)$-fach associirt nennen. Wir können alsdann folgende Sätze aufstellen:

Alle Flächen zweiter Ordnung von Σ sind sich selbst dreifach associirt.

Jede Fläche F^{2n} $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, die einer Fläche F_1^n n^{ter} Ordnung in Σ_1 entspricht, ist sich selbst dreifach associirt.

Jeder durch die Basis b gelegten Ebene π ist eine zweite π' associirt, so dass jedem Punkte P in π drei Punkte in π' beigeordnet sind. Bewegt sich P in π auf einer Geraden g, so beschreiben die drei associirten einen und denselben Kegelschnitt g'^2, welcher sowohl b wie g trifft.

Einem Strahlenbüschel mit dem Centrum C in π ist ein zu ihm projectiver Kegelschnittbüschel in π' associirt, dessen Elemente durch $b'\pi'$ und die drei zu C associirten Punkte gehen. Diese beiden Büschel liegen nämlich zu demselben F^2-Büschel perspectiv. In jedem solchen Kegelschnittbüschel giebt es drei in Strahlenpaare zerfallende Kegelschnitte, welche ein vollständiges Viereck bilden. Die drei nicht durch $b'\pi'$ gehenden Strahlen umhüllen in π' mit allen analog bestimmten Geraden einen Kegelschnitt; denn es sind die in π' liegenden Hauptstrahlen.

Die Ebenen π' von B^3 sind sich selbst zweifach associirt. Jeder Hauptstrahl ist sich selbst associirt.

Durch eine Gerade g, welche in einer Ebene von B^3 liegt, aber keine Axe dieses Ebenenbüschels ist, kann eine einzige Regelfläche zweiter Ordnung gelegt werden, welche von B^3 eingehüllt wird. Die eine Regelschaar dieser Fläche besteht aus Axen, jeder Strahl der Leitschaar liegt in einer Ebene von B^3*. Nehmen wir also die Gerade g in der Ebene π' an, so müssen die associirten Punkte in π zugleich auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen; also:

Durchläuft ein Punkt eine Gerade g von π', so beschreibt der associirte Punkt in π einen Kegelschnitt.

Jede aus Hauptstrahlen bestehende Regelschaar ist sich selbst einfach associirt.

Wir fügen hierzu den Satz (§ 4):

Die Kernfläche ist der Ort aller sich selbst associirten Punkte.

Die Ordnungspunkte des auf einem Hauptstrahle s liegenden involutorischen Gebildes sind daher Punkte der Kernfläche. Den beiden andern Schnittpunkten von s mit K^4 sind die beiden Schnittpunkte von s mit der abwickelbaren Fläche K'^4 associirt. Da in π' die beiden Hauptstrahlen m und n, welche die Basis treffen, einander associirt sind, so sind die Ordnungspunkte aller in π' liegenden Hauptstrahlen auch durch m und n harmonisch getrennt.

---

* Reye, a. a. O., Th. II, p. 73.

Zu jeder beliebig in Σ angenommenen Fläche gehört eine zweite, welche sich selbst zweifach associirt ist. Wir wollen dieselben später untersuchen, zugleich mit den Flächen, welche ihnen in Σ_1 entsprechen.

§ 8. Ueber die Fläche in Σ_1, welche einer Ebene von Σ entspricht*.

Nehmen wir in dem Raume, in welchem wir uns das F^2-Gebüsch liegend denken, willkürlich eine Fläche an, so ist dadurch in dem räumlichen Systeme Σ_1 eine zweite gegeben, deren Punkte denen der ersteren im Allgemeinen eindeutig entsprechen.

Einer beliebigen Ebene φ von Σ entspricht in Σ_1 eine geradlinige Fläche F_1^3 dritter Ordnung.

Letztere ist von der dritten Ordnung, weil sie mit irgend einer Geraden des Raumes ebensoviele Punkte gemein hat, wie die Ebene φ mit der homologen Raumcurve dritter Ordnung, also drei.

Dem Strahlenbüschel erster Ordnung von φ, dessen Centrum X in b liegt, entspricht die Regelschaar auf F_1^3. Der Punkt X in der Ebene φ ist das Bild einer Leitlinie x_1 von F_1^3, da letztere von sämmtlichen Erzeugenden getroffen wird.

In der Ebene φ liegt ein Hauptstrahl u (§ 3). Jedem Punktenpaare der auf u liegenden involutorischen Punktreihe entspricht ein und derselbe Punkt der homologen Geraden u_1, folglich ist u_1 eine Doppelgerade von F_1^3. Jede Ebene ε_1 durch x_1 schneidet u_1 in einem Punkte P_1, welcher durch zwei Erzeugende mit einem Punktenpaare von x_1 verbunden werden kann. Denn dem Ebenenbüschel x_1 entspricht ein Büschel von Kegelflächen mit dem gemeinsamen Centrum X, welche durch φ in einem involutorischen, zu u perspectiven Strahlenbüschel geschnitten werden. Be-

---

* Reye, a. a. O., §§ 199—201. — Meyer, Flächensyst., § 12. — Benno Klein, Ueber die geradlinige Fläche III. Ordnung.

trachten wir weiter in Σ den F^2-Büschel, zu dessen Grundcurve u gehört. Derselbe wird von φ ausser in der gemeinsamen Geraden u in dem Strahlenbüschel erster Ordnung X geschnitten. Denken wir uns die Flächen des Büschels u doppelt und ordnen diejenigen Flächen einander zu, welche die Ebene φ in einem Paare des involutorischen Strahlenbüschels X schneiden, so bilden die beiden in einander liegenden F^2-Büschel ein involutorisches System. Dadurch sind aber die Ebenen des Büschels u_1 in Σ_1 ebenfalls involutorisch gepaart, und zwar so, dass je zwei Ebenen einander zugewiesen sind, welche zwei in derselben Ebene von x_1 liegende Erzeugende von F_1^3 enthalten. Zugleich werden durch diesen involutorischen Ebenenbüschel die Punkte von x involutorisch gepaart. Also:

Auf der windschiefen Fläche F_1^3 liegen ausser den Erzeugenden noch eine gerade Leitlinie x_1 und eine Doppelpunktsgerade u_1. Jede Ebene des Büschels x_1 enthält ein Paar von Erzeugenden, deren Schnittpunkt auf u_1 liegt; durch dieselben sind die Punkte von x_1 und die Ebenen von u_1 involutorisch gepaart.

Jeder nicht durch X gehenden Geraden g von φ entspricht auf F_1^3 ein zu ihr projectiver Kegelschnitt g_1^2, dessen Ebene noch eine Erzeugende s aus F_1^3 schneidet; denn die durch g gehende Fläche zweiter Ordnung von Σ schneidet φ noch in einer zweiten durch X gehenden Geraden. Alle Geraden g in φ lassen sich perspectiv auf den Strahlenbüschel X beziehen, und andrerseits alle Geraden durch X auf jeden beliebigen Strahlenbüschel von φ. Daraus folgt, dass die Kegelschnitte von F_1^3 durch die Erzeugenden projectiv auf einander bezogen sind, die Erzeugenden aber durch jede Schaar von Kegelschnitten, die durch einen Punkt von F_1^3 gehen.

Vier harmonische Flächen des F^2-Büschels u schneiden φ in vier harmonischen Strahlen und eine Gerade g in φ in vier harmonischen Punkten. Deshalb schneiden in Σ_1 die vier homologen Ebenen durch u_1 sowohl x_1 wie g_1^2 in vier harmonischen Punkten. Daraus schliessen wir, dass die auf F_1^3 liegenden Kegelschnitte durch die Regelschaar dritter Ordnung auf das gerade Gebilde x_1 projectiv bezogen sind.

Zugleich finden wir:

Der Ebenenbüschel B_1^4 vierter Ordnung kann durch einen Kegelschnitt und zwei gerade Gebilde erzeugt werden, die auf einander projectiv bezogen sind.

Zum Beweise nehmen wir zwei beliebige Ebenen μ und ν in Σ an; ihre Schnittlinie bezeichnen wir mit l. Der Ebenenbüschel b ruft in μ und ν zwei zu l perspective Strahlenbüschel X resp. Y hervor. In Σ_1 entsprechen den beiden Ebenen zwei windschiefe Flächen M_1^3 und N_1^3 dritter Ordnung mit den Doppelpunktsgeraden x_1 und y_1 und dem gemeinsamen Kegelschnitt l_1^2. Durch die beiden Regelschaaren von M_1^3 und N_1^3 werden x_1 und y_1 auf den Kegelschnitt l_1^2 und folglich auch auf einander projectiv bezogen, und zwar liegen je zwei zusammengehörige Punkte von x_1 und y_1 auf demselben Leitstrahle der Regelschaar X_1^2 zweiter Ordnung. Verbinden wir nun je zwei Erzeugende, welche sich in dem nämlichen Punkte von l_1^2 begegnen, durch eine Ebene, so erhalten wir die Ebenen des Büschels B_1^4. Zugleich ergiebt sich:

Alle Kegelschnitte von Σ_1, denen in Σ Gerade entsprechen, werden durch die Ebenen des Büschels B_1^4 auf einander und auf die Geraden der Regelschaar X_1^2 projectiv bezogen.

Je zwei Gerade g und k in der Ebene φ sind durch den Strahlenbüschel X projectiv auf einander bezogen, so dass sie ihren Schnittpunkt entsprechend gemein haben. Folglich kann die Fläche F_1^3 durch zwei projective Kegelschnitte erzeugt werden, welche einen Punkt entsprechend gemein haben, übrigens aber in verschiedenen Ebenen liegen.

Von den Kegelflächen, deren Doppelpunkt X ist, berühren zwei die Ebene φ in je einer Geraden s resp. t. Letztere projiciren aus X die Ordnungspunkte M und N der involutorischen Punktreihe u. In Σ_1 giebt es in Folge dessen zwei Ebenen des Büschels x_1, welche F_1^3 in allen Punkten der Geraden s_1 resp. t_1 berühren. Diese Geraden s_1 und t_1 sind die singulären Erzeugenden, die den Punkten M und N entsprechenden Punkte die Cuspidalpunkte von F_1^3.

Alle Kegelschnitte, in denen die Flächen zweiter Ordnung von Σ die Ebene φ durchdringen, sind Bilder der ebenen

Schnitte von F_1^3. Dieselben treffen u in je zwei zugeordneten Punkten.

Einem durch X gelegten Kegelschnitt k^2 der Ebene φ ist in Σ_1 eine Raumcurve k_1^3 dritter Ordnung zugewiesen, weil k^2 von jeder Fläche zweiter Ordnung des Gebüsches ausser in X nur noch in drei Punkten geschnitten werden kann, also in Σ_1 eine beliebige Ebene die Curve k_1^3 in höchstens drei Punkten treffen kann. Legen wir nun durch k_1^3 eine Fläche zweiter Ordnung L_1^2, so durchdringt L_1^2 die windschiefe Fläche F_1^3 noch in einer zweiten Raumcurve l_1^3 dritter Ordnung; denn der Fläche L_1^2 entspricht in Σ eine Fläche vierter Ordnung L^4, welche b zur Doppellinie hat. Die Spur von L^4 in der Ebene φ muss somit ausser dem Kegelschnitt k^2 noch eine zweite, ebenfalls durch X gehende Curve zweiter Ordnung sein. —

Weil allgemein einer Fläche dritter Ordnung von Σ_1 in Σ eine Fläche sechster Ordnung entspricht, so muss die Fläche, welche unserer geradlinigen Fläche F_1^3 zugeordnet ist, in die Ebene φ und eine Fläche fünfter Ordnung F'^5 zerfallen. Der Ebene φ ist also eine Fläche F'^5 fünfter Ordnung associirt, welche dreimal durch b geht, und welche eine einfach unendliche Schaar von Kegelschnitten enthält, deren Ebenen den Büschel B^3 dritter Ordnung bilden. Einer beliebigen Geraden c von φ ist eine Raumcurve c'^5 fünfter Ordnung auf F^3 associirt. Nämlich der zu c homologe Kegelschnitt c_1^2 kann als Schnitt einer Ebene und einer Fläche zweiter Ordnung angesehen werden. Ihm muss also in Σ die Schnittcurve einer gewissen Fläche F^3 des Gebüsches und einer Fläche L^4 vierter Ordnung entsprechen. Die genannten Flächen schneiden sich in der doppelt zu zählenden Geraden b, der Geraden c, und folglich noch in einer Curve c'^5. Jede Gerade derjenigen Regelschaar auf F^2, zu welcher b und c gehören, trifft c'^5 in vier, jeder Leitstrahl in einem Punkte.

Die Ebene φ schneidet F'^5 in einem Hauptstrahle u und einer Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkte in X; in derselben Curve durchdringt auch die Kernfläche K^4 die Ebene φ, da dieselbe der Ort aller sich selbst associirten Punkte der Ebene φ ist.

Auf F^6 liegen ausser der dreifachen Geraden b und der dazu windschiefen einfachen Geraden u noch zwei Doppelpunktsgerade, welche die beiden ersten schneiden, und welche der Geraden u associirt sind. Denn beschreibt ein Punkt das involutorische gerade Gebilde u, so durchlaufen die associirten Punkte P' zweimal ihren Weg, indem je zwei einander zugeordnete Punkte von u dem ihnen associirten Punkte P' dieselbe Lage anweisen.

F^6 enthält ferner drei einfache Gerade mit dem gemeinschaftlichen Punkte X. Dieselben entsprechen der Geraden x_1 auf F_1^3.

§ 9. Ueber Flächen VI. Ordnung von Σ_1, denen in Σ Flächen II. Ordnung entsprechen.

Es sei eine Fläche H^2 zweiter Ordnung in Σ gegeben, die nicht dem Gebüsch selbst angehört. Derselben entspricht eine Fläche H_1^6 sechster Ordnung in Σ_1, welche von einer beliebigen Geraden deshalb in sechs Punkten getroffen wird, weil H^2 mit einer Grundcurve eines F^2-Büschels von Σ im Allgemeinen sechs Punkte gemein hat.

Die Fläche H_1^6 enthält zwei Gerade x_1 und y_1, welche den Punkten X und Y entsprechen, in denen H^2 von der Basis b getroffen wird.

Die Schnitte von H_1^6 mit beliebigen Ebenen werden auf H^2 dargestellt durch Raumcurven vierter Ordnung erster Species. Ausgenommen sind die Ebenen des Büschels B_1^4, deren Schnittcurven jedesmal in einen Kegelschnitt und eine Curve vierter Ordnung zerfallen, weil in Σ die homologen Curven zerfallen, und zwar in Kegelschnittpaare, die in den Ebenenpaaren des F^2-Gebüsches liegen.

Ist H^2 eine Regelfläche, so enthält H_1^6 ausser der soeben angegebenen Schaar noch zwei andere Schaaren von Kegelschnitten, welche den beiden Regelschaaren von H^2 entsprechen. Weil nun einem beliebigen geraden Gebilde von Σ eine zu ihr projective Punktreihe zweiter Ordnung in

Σ_1 entspricht, so ergeben sich die folgenden Eigenschaften von H_1^6 ohne Weiteres aus den analogen von H^3.

Im Allgemeinen begegnen sich zwei Kegelschnitte derselben Schaar in keinem Punkte, je zwei von verschiedenen Schaaren in einem einzigen, und zwar werden alle Kegelschnitte einer jeden der beiden Schaaren durch die der andern projectiv auf einander bezogen.

Wir haben gefunden (§ 8), dass alle Kegelschnitte von Σ_1, denen in Σ Gerade entsprechen durch die Ebenen des Büschels B_1^4 auf einander und auf die Geraden der Regelschaar X_1^2 projectiv bezogen werden. Wenden wir dies hier an, so folgt, dass die Kegelschnitte von jeder der beiden letzten Schaaren projectiv auf einander und auf die Geraden x_1 und y_1 bezogen werden durch die zuerst genannte Schaar.

Endlich schneiden die Ebenen π des Büschels b Curven zweiter Ordnung aus, welche perspectiv zu jeder Regelschaar von H^3 liegen, also dadurch projectiv auf einander bezogen sind. Die homologen Ebenen π_1 in Σ_1 sind collinear zu den Ebenen π, folglich sind die in ihnen liegenden Kegelschnitte durch jede der beiden letzten Schaaren projectiv auf einander bezogen. Es werden somit die Kegelschnitte einer jeden der drei Schaaren durch die beiden andern projectiv auf einander bezogen.

Seien p und q die Strahlen der einen Regelschaar der Fläche H^3, und m und n die der zweiten, welche durch resp. X und Y gehen, so entsprechen diesen auf H_1^6 wieder vier Gerade. Die Gerade x_1 wird von p_1 und m_1, y_1 von q_1 und n_1 geschnitten. Ferner lassen sich sowohl p und n, als auch m und q durch eine Ebene mit der Basis verbinden; demnach liegen p_1 und q_1 mit resp. n_1 und m_1 in zwei Ebenen des Büschels B_1^4. Dagegen sind p_1 und q_1 windschief zu resp. m_1 und n_1, weil in Σ zwei beliebige Gerade, nämlich p und m oder q und n, sich im Allgemeinen nicht durch eine zum Gebüsch gehörige Fläche zweiter Ordnung verbinden lassen. Desgleichen haben p_1 und m_1 mit resp. q_1 und n_1 keinen Punkt gemein, weil p und q, ferner m und n derselben Regelschaar angehören und sich in Folge dessen kreuzen.

Die sechs Geraden der Fläche H_1^6 bilden also ein windschiefes Sechseck, so dass in der Reihenfolge $x_1\ p_1\ n_1\ y_1\ q_1\ m_1\ x_1$ jede Gerade nur die beiden benachbarten schneidet.

Wir hatten gefunden (§ 6), dass einer Fläche F_1^n von Σ_1 eine Fläche F'^{2n} von der Ordnung $2.n$ entspricht. Einer Fläche sechster Ordnung muss daher eine Fläche zwölfter Ordnung entsprechen, welche in unserem Falle aus H^2 und einer Fläche H'^{10} zehnter Ordnung besteht. Die letztere geht sechsmal durch die Basis b. Den Geraden x_1 und y_1 von H_1^6 entsprechen auf H'^{10} je drei durch X resp. Y gehende Gerade. Den Kegelschnitten k^2 von H^2, welche die beiden Punkte X und Y enthalten, ist auf H'^{10} eine Schaar von ebenen Curven vierter Ordnung associirt, deren Ebenen den Büschel B^3 dritter Ordnung bilden, und welche allemal in der Basis b einen Doppelpunkt besitzen. Denn wenn man einen der entsprechenden Kegelschnitte k_1^2 der collinearen Ebene π_1 als Schnittcurve von π_1 und einer Regelfläche L_1^2 auffasst, zeigt es sich, dass dem Kegelschnitt k_1^2 ausser k^2 die Schnittcurve von π' mit einer Fläche L^4 vierter Ordnung entspricht.

Ist H^2 eine Regelfläche, so sind den vier X und Y schneidenden Geraden $m\ p\ n\ q$ vier Kegelschnitte $m^2\ p^2\ n^2\ q^2$ associirt, von denen p^2 und n^2 und desgleichen q^2 und m^2 in einer Ebene liegen. Den beiden Regelschaaren auf H^2 sind zwei Schaaren von Raumcurven fünfter Ordnung durch Association zugewiesen, so dass sich je zwei Curven derselben Schaar in keinem Punkte, je zwei von verschiedenen Schaaren in drei associirten Punkten schneiden.

§ 10. Ueber Flächen IV. Ordnung von Σ_1, denen in Σ Flächen II. Ordnung entsprechen.

Legen wir eine Regelfläche R^2 zweiter Ordnung durch die Basis b, so entspricht ihr die oben betrachtete Regelfläche X_1^2 und eine geradlinige Fläche R_1^4 vierter Ordnung; denn eine beliebige Grundcurve des Gebüsches hat mit der Basis b

zwei Punkte gemein, und ausserdem noch vier mit R^2. Daher liegen in Σ auf der homologen Geraden zwei Punkte von X_1^2 und vier Punkte von R_1^4.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Untersuchung der Fläche R_1^4.

Die Erzeugenden e_1 von R_1^4 entsprechen den Strahlen der Regelschaar auf R^2, von welcher b ein Leitstrahl ist. Jeder Geraden g der zweiten Schaar auf R^2 entspricht ein zu ihr projectiver Kegelschnitt auf R_1^4.

Die Erzeugenden der windschiefen Fläche R_1^4 vierter Ordnung sind durch die Kegelschnitte, und die Kegelschnitte sind durch die Erzeugenden projectiv auf einander bezogen. R_1^4 kann erzeugt werden durch eine Gerade, welche an zwei projectiven Kegelschnitten entlang gleitet, die keinen gemeinschaftlichen Punkt haben.

Diese Fläche ist die erste Art in der Klassification von Cremona.*

Eine Fläche des Gebüsches, welche eine die Basis b schneidende Gerade e mit R^2 gemein hat, begegnet R^2 noch in einem Kegelschnitt l^2. Legen wir durch den Schnittpunkt S von e mit l^2 die Tangente t an l^2, so berührt die Verbindungsebene te im Punkte S beide Flächen zweiter Ordnung, d. h. die Flächen berühren sich selbst in diesem Punkte. In Σ_1 entspricht der Geraden e eine Erzeugende e_1, dem Kegelschnitt l^2 eine ebene Curve l_1^3 dritter Ordnung, und einer der drei Schnittpunkte von e_1 mit l_1^3 ist der Berührungspunkt der Ebene $e_1 l_1^3$ und der Fläche R_1^4. Daraus folgt der erste Theil des Satzes:

Die Berührungsebenen von R_1^4 gehen durch die Erzeugenden dieser Fläche. Die Berührungspunkte in einer jeden Erzeugenden sind projectiv auf die zugehörigen Berührungsebenen bezogen.

---

* Cremona, a. a. O., § 2. — Clebsch, Ueber die eb. Abbildung etc. Math. Ann. II. — Vgl. Armenante, Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere $p = o$ sopra un piano, §§ 8—9 (Annali di Matem., Ser. II, t. IV.

Der letzte Theil ergiebt sich unmittelbar, wenn man das an die windschiefe Fläche sich anschmiegende Hyperboloid construirt, welches jene Erzeugende und ausserdem die beiden unendlich nahe benachbarten enthält.*

Eine Fläche zweiter Ordnung des Gebüsches, welche durch eine Gerade g von R^2 bestimmt ist, hat im Allgemeinen ausser b und g noch zwei Strahlen der andern Regelschaar mit R^2 gemein. Dies, auf Σ_1 übertragen, giebt:

Die Ebene eines Kegelschnitts auf R_1^4 schneidet die Fläche R_1^4 im Allgemeinen in zwei Erzeugenden, e_1 f_1, und berührt dieselbe doppelt.

In der That berührt auch in Σ die entsprechende Fläche zweiter Ordnung die Fläche R^2 in je zwei Punkten von e und f. Von diesen liegen jedoch zwei auf b, woraus nichts für R_1^4 gefolgert werden kann.

Die Erzeugenden sind durch die Kegelschnitte von R_1^4 projectiv auf einander bezogen. Wählen wir in Σ_1 drei dieser projectiven geraden Gebilde so, dass ihre Träger nicht in einer Ebene liegen — was immer möglich ist, wofern nicht R^2 ganz mit einer Fläche des Gebüsches zusammenfallen soll — so ergiebt sich, dass die Ebenen der Kegelschnitte einen Ebenenbüschel dritter Ordnung bilden, von welchem die Erzeugenden Axen sind. Da aber jede Ebene, welche einen Kegelschnitt enthält, R_1^4 doppelt berührt, so folgt:

Die doppelt berührenden Ebenen der Fläche R_1^4 bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, zu dessen Axensystem die Erzeugenden von R_1^4 gehören.

Wir können auch zwei collineare ebene Systeme benutzen, um denselben Ebenenbüschel zu erzeugen. Dazu brauchen wir nur zwei Ebenen $\varkappa_1$ und λ_1, welche zwei Kegelschnitte k_1^2 resp. l_1^2 von R_1^4 enthalten, collinear so auf einander zu beziehen, dass die projectiven Punktreihen k_1^2 und l_1^2 einander entsprechen.

Die Erzeugenden der windschiefen Fläche R_1^4 schneiden sich paarweise in den Punkten einer Doppelcurve der Fläche.

---

* Chasles, Surfaces engendrées par une ligne droite. (5). — Salmon, a. a. O., Th. II, p. 251. — Vgl. Clebsch, a. a. O., § 4.

Wir wollen im Folgenden nur den einen Hauptfall ins Auge fassen, wo wenigstens ein Theil dieser sich schneidenden Erzeugenden reell ist; wo also die Doppelcurve nicht in ihrer ganzen Ausdehnung isolirt ist.

Wir projiciren die oben construirten collinearen Systeme $\varkappa_1$ und λ_1 aus einem solchen Punkte P_1 der Doppelcurve, in welchem sich zwei reelle Erzeugende e_1 und f_1 schneiden. Die Kegelschnitte k_1^2 und l_1^2 werden dabei durch zwei zu einander projective Kegelflächen zweiter Ordnung projicirt, welche die zwei Geraden e_1 und f_1 entsprechend gemein haben und folglich einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung erzeugen. Wir haben also den Satz bewiesen:

Aus jedem nicht isolirten Doppelpunkte der windschiefen Fläche R_1^4 werden die Erzeugenden derselben durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt.

Es folgt hieraus:

Die Berührungsebenen, welche sich aus einem Punkte der Doppelcurve an die Fläche R_1^4 vierter Ordnung legen lassen, bilden zwei Ebenenbüschel e_1 und f_1 erster Ordnung und einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Projiciren wir die Erzeugenden von R_1^4 aus zwei Doppelpunkten P_1 und Q_1, so sind die entstehenden Ebenenbüschel zweiter Ordnung perspectiv auf die Kegelschnitte der doppelt berührenden Ebenen bezogen, also durch die Erzeugenden projectiv auf einander. Daraus ergiebt sich die zweite, zu der oben angegebenen reciproke Erzeugungsart:

Die geradlinige Fläche R_1^4 kann erzeugt werden durch zwei projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung.

Beziehen wir die Strahlenbündel, deren Mittelpunkte P_1 und Q_1 sind, collinear auf einander, so dass die Erzeugenden der Fläche R_1^4 durch homologe Ebenen projicirt werden, so ergiebt sich:

Die von den collinearen Strahlenbündeln P_1 und Q_1 erzeugte Raumcurve dritter Ordnung ist die Doppelcurve der geradlinigen Fläche R_1^4 vierter Ordnung. Die Erzeugenden der Fläche sind Secanten dieser Raumcurve.

Denn jeder Punkt der Raumcurve dritter Ordnung liegt in zwei Paaren homologer Ebenen der Ebenenbüschel zwei-

ter Ordnung, und es gehen daher zwei Erzeugende durch ihn hindurch.

Wir beziehen nun einen Strahlenbündel, dessen Träger K_1 ein nicht isolirter Doppelpunkt ist, reciprok auf das ebene System $\varkappa_1$, welches die beiden durch den Punkt K_1 gehenden Erzeugenden der windschiefen Fläche R_1^4 enthält. Zu diesem Zwecke ordnen wir jeder Ebene von K_1, welche eine Erzeugende von R_1^4 projicirt, den Schnittpunkt derselben Erzeugenden mit $\varkappa_1$ zu. Verfahren wir in analoger Weise mit einem zweiten Strahlenbündel L_1 und der Ebene λ_1, welche zwei im Punkte L_1 sich schneidende Erzeugende von R_1^4 enthält, so ist dadurch das räumliche System Σ_1, zu welchem die Strahlenbündel K_1 und L_1 gehören, reciprok auf den Raum Σ_2 bezogen, in welchem sich die ebenen Systeme $\varkappa_1$ und λ_1 befinden. Zum Beweise dieser Behauptung ist nur noch nöthig darzuthun, dass die Schnittlinie $\varkappa_1\lambda_1$ der Verbindungslinie K_1L_1 und jedem Punkte der ersteren eine Ebene der letzteren entspricht. Rechnen wir $\varkappa_1\lambda_1$ z. B. zu der Ebene $\varkappa_1$, so finden wir den entsprechenden Strahl von K_1, indem wir λ_1 mit dem Kegelschnitt k_1^2 zum Durchschnitt bringen, die durch die Schnittpunkte gehenden Erzeugenden von R_1^4 aus K_1 projiciren und den Schnitt der projicirenden Ebenen suchen. Die verlangten Erzeugenden liegen aber in λ_1 und schneiden sich in L_1, folglich entspricht der Geraden $\varkappa_1\lambda_1$ die Gerade K_1L_1. Es lassen sich nun sofort vier Punkte auf $\varkappa_1\lambda_1$ angeben, welchen ihre resp. Verbindungsebenen mit K_1L_1 entsprechen; das sind die vier Punkte, in denen die in $\varkappa_1$ resp. λ_1 liegenden Kegelschnitte k_1^2 und l_1^2 die Gerade $\varkappa_1\lambda_1$ schneiden. Hieraus folgt, wie verlangt wurde, dass jedem Punkte der Linie $\varkappa_1\lambda_1$ eine Ebene der Linie K_1L_1 entspricht. Die gefundene reciproke Verwandtschaft ist aber von der Art, dass jede Erzeugende der Fläche R_1^4 sich selbst entspricht, und folglich jedem Punkte von R_1^4 eine durch ihn gehende Ebene. Deshalb haben die Systeme Σ_1 und Σ_2 invo-

lutorische Lage und bilden ein Nullsystem, zu dessen Leitstrahlen die Erzeugenden der windschiefen Fläche R_1^4 gehören. Wir haben das Resultat:

Die Erzeugenden der geradlinigen Fläche R_1^4 vierter Ordnung bestimmen einen linearen Strahlencomplex, in welchem sie liegen*.

Nämlich die Leitstrahlen des gefundenen Nullsystems bilden den genannten Complex.

In Rücksicht darauf, dass die Erzeugenden von R_1^4 Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung sind, welche sich als Doppelcurve von R_1^4 repräsentirt, oder auch Axen eines gewissen Ebenenbüschels dritter Ordnung, dessen Ebenen R_1^4 doppelt berühren, haben wir die zu einander reciproken Sätze:

Diejenigen Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung, welche einem gegebenen linearen Strahlencomplexe angehören, bilden eine windschiefe Fläche R_1^4 vierter Ordnung. Die Raumcurve ist die Doppelcurve der Fläche. Und:

Die Axen eines Ebenenbüschels dritter Ordnung, welche zugleich einem gegebenen linearen Complexe angehören, bilden die geradlinige Fläche R_1^4. Die Ebenen des Büschels dritter Ordnung berühren die Fläche doppelt.

Kehren wir noch einmal zu den collinearen Ebenen $\varkappa_1$ und λ_1 zurück. Dieselben haben die Kegelschnitte k_1^2 resp. l_1^2 mit R_1^4 gemein. Der Büschel doppelt berührender Ebenen von R_1^4 schneidet die Ebenen $\varkappa_1$ und λ_1 in zwei projectiven Strahlenbüscheln zweiter Ordnung. Jeder von den beiden letzteren besitzt im Allgemeinen vier Strahlen, welche k_1^2 resp. l_1^2 berühren, und es existiren ebenso viele doppelt berührende Ebenen, in denen zwei Erzeugende einander unendlich nahe gerückt sind. Diese vier Erzeugenden heissen «singuläre». Die Ebenen, in welchen sie liegen, heissen «Cuspidalebenen» und die Schnittpunkte der unendlich nahen Erzeugenden «Cuspidalpunkte». Die singulären Erzeugenden berühren in den Cuspidalpunkten die Doppelcurve.

---

* Vgl. Clebsch, a. a. O., §§ 2 u. 3.

Die windschiefe Fläche R_1^4 hat im Allgemeinen vier singuläre Erzeugende; sie wird in allen Punkten einer solchen Erzeugenden von einer und derselben Ebene berührt mit Ausnahme des Cuspidalpunktes, wo sie von allen durch die Erzeugende gehenden Ebenen tangirt wird.

Dieser Satz steht sich selbst reciprok gegenüber.

Jedem Paare associirter Punkte von R^2 muss ein Doppelpunkt auf R_1^4 entsprechen. Suchen wir nun den Ort dieser Punktenpaare auf.

Einer in Σ_1 gegebenen Fläche vierter Ordnung entspricht eine Fläche achter Ordnung in Σ. Der Fläche R^2 ist deshalb eine Fläche sechster Ordnung R'^6 associirt, welche im Verein mit R^2 die zu R_1^4 homologe Fläche achter Ordnung darstellt. Im Ganzen müssen die Flächen R^2 und R'^6 viermal durch b gehen; b liegt einfach auf R^2, also ist sie dreifache Gerade von R'^6. Jeder Punkt der Schnittcurve von R^2 und R'^6 ist entweder sich selbst associirt oder einem zweiten Punkte, welcher sowohl auf R^2 als auch auf R'^6 liegt, folglich ebenfalls auf der Durchdringungscurve von R^2 und R'^6. Der Ort aller sich selbst associirten Punkte ist nun die Kernfläche K^4 des Gebüsches. Dies zusammengefasst giebt den Satz:

Die Durchdringungscurve von R^2 mit ihrer associirten Fläche R'^6 zerfällt in eine Raumcurve achter Ordnung und eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species. In der ersteren, welche der Ort aller sich selbst associirten Punkte von R^2 ist, schneidet die Kernfläche des Gebüsches die Regelfläche R^2; die letztere enthält alle Paare associirter Punkte von R^2 und entspricht der Doppelcurve von R_1^4.

Es ist noch nöthig nachzuweisen, dass die Curve vierter Ordnung von der ersten Species ist. In der That, bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden s der Regelschaar R^2, welche b schneidet, so durchlaufen die associirten Punkte einen Kegelschnitt, welcher R^2 in vier Punkten trifft. Von diesen vieren liegen zwei auf der Kernfläche, nämlich der Schnittpunkt des Kegelschnitts mit b, und der mit s, so dass es auf jeder Geraden s der einen Regelschaar von R^2 zwei Punkte giebt, welchen noch andere Punkte auf R^2 associirt

sind. D. h.: Jeder Strahl der einen Regelschaar auf R^2 und folglich auch jeder Leitstrahl schneidet die auf R^2 liegende Raumcurve vierter Ordnung in zwei Punkten, und dies ist ein charakteristisches Zeichen dafür, dass die Curve von der ersten Species ist.*

Alle ebenen Schnitte von R_1^4 bilden sich auf R^2 ab als Raumcurven dritter Ordnung, in denen R^2 von den Flächen zweiter Ordnung des Gebüsches getroffen wird. Dieselben haben diejenige Regelschaar von R^2 zu gemeinschaftlichen Secanten, zu welcher die Basis b gehört. Eine Berührungsebene von R_1^4 enthält ausser einer Erzeugenden eine Curve dritter Ordnung; dieser entspricht auf R^2 ein Kegelschnitt.

Ist eine Curve dritter Ordnung auf R^2 gegeben, welche die Basis und jeden Strahl der zugehörigen Regelschaar in einem Punkte trifft, während die Leitstrahlen Secanten der Curve sind, so entspricht derselben auf R_1^4 eine Raumcurve fünfter Ordnung. Denn eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, welche dem Gebüsche angehört, schneidet die Raumcurve dritter Ordnung ausserhalb b nur noch in fünf Punkten; folglich schneidet eine Ebene des räumlichen Systems die homologe Curve ebenfalls in höchstens fünf Punkten. Diese Curven treffen jeden Kegelschnitt von R_1^4 in einem, jede Erzeugende in zwei Punkten.

Allgemein entspricht einer Curve auf R^2, welche die Strahlen der Regelschaar, zu der b gehört, in je α, die Leitstrahlen in je β Punkten schneidet, eine Curve von der Ordnung $\alpha + 2\beta$ auf R_1^4, so dass auf jeden Kegelschnitt α, auf jeder Erzeugenden β Punkte liegen.

Projiciren wir die Punkte der Fläche R^2 aus einem ihrer Punkte O auf eine willkürlich gegebene Ebene ε, so haben wir zwischen R_1^4 und ε eine eindeutige Beziehung hergestellt, und zwar diejenige, welche zuerst von Clebsch a. a. O. angegeben wurde.

Es werden zwei Punkte der ebenen Abbildung in ε ausgezeichnet, durch welche sich die durch den willkürlich

---

* Steiner, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 53, p. 138.

gewählten Punkt O gehenden Erzeugenden von R^2 darstellen. Wir nennen dieselben «Fundamentalpunkte». Der eine, M, stellt einen Kegelschnitt von R_1^4 dar, der zweite, N, eine Erzeugende. Ferner ist eine Gerade in ε ausgezeichnet, welche die Punkte M und N verbindet und nur einem einzigen, übrigens willkürlichem Punkte O_1 von R_1^4 entspricht, weil $\overline{MN}$ durch die Tangentialebene der Fläche R^2 im Punkte O ausgeschnitten wird.

Die Erzeugenden von R_1^4 werden durch den Strahlenbüschel M, die Kegelschnitte durch den Strahlenbüschel N abgebildet. Die ebenen Schnitte werden durch Curven dritter Ordnung repräsentirt, welche in M einen Doppelpunkt, in N einen einfachen Punkt haben. Gewisse durch M und N gehende Kegelschnitte stellen im Verein mit je einem Strahl durch M die Schnitte der Berührungsebenen dar. Die Doppelcurve bildet sich durch eine Curve vierter Ordnung ab, welche in M und N Doppelpunkte besitzt. Die Schnittlinie einer ganz beliebigen Fläche F_1^n n^{ter} Ordnung mit R^4, schliesslich wird repräsentirt durch eine Curve von der Ordnung $3.n$ mit M als $2.n$-fachen, N als n-fachen Punkt.

Zu einer andern Art von windschiefen Flächen vierter Ordnung gelangen wir, wenn wir im F^2-Gebüsch die Fläche R^2 durch die Basis b und durch einen Hauptstrahl s legen, ohne dass jedoch R^2 dem Gebüsch angehören soll. Alsdann reducirt sich einer der Kegelschnitte von R_1^4 auf eine Doppelgerade s_1, die mit den übrigen Kegelschnitten im Allgemeinen keinen Punkt gemein hat. Beziehen wir in Σ diejenige Regelschaar von R^2, von der s ein Leitstrahl ist, perspectiv auf die involutorische Punktreihe im Hauptstrahle s, so werden die übrigen Leitstrahlen von jener Regelschaar ebenfalls in involutorischen Punktreihen geschnitten. Daher gehen in Σ, durch jeden Punkt von s_1 zwei Erzeugende der Fläche R_1^4; durch dieselben werden die Punkte der Kegelschnitte von R_1^4 involutorisch gepaart.

Diese windschiefe Fläche R_1^4 ist von Herrn Cremona a. a. O. als zweite Species beschrieben worden. Bei derselben besteht der Ort der Doppelpunkte aus der Geraden s_1 und

einem Kegelschnitte, und die doppelt berührenden Ebenen bilden einen Büschel zweiter Ordnung und den Büschel erster Ordnung s_1.

Enthält R^2 zwei Hauptstrahlen s und t von Σ, so wird die Fläche R_1^4 erzeugt durch zwei sich kreuzende Gerade s_1 und t_1, welche so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte der einen zwei der andern entsprechen. Diese Geraden sind die Doppellinien von R_1^4, und die durch dieselben gehenden Ebenen berühren die Fläche R_1^4 doppelt. Dies ist die eilfte Cremona'sche Art.

Aus der zuletzt angeführten Fläche lässt sich leicht die von Herrn Cremona als fünfte Art beschriebene Fläche ableiten. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen Hauptstrahl in Σ beliebig an und verbinden einen Ordnungspunkt der auf ihm liegenden involutorischen Punktreihe mit b. Diese Verbindungsebene enthält eine Erzeugende p der Kernfläche. Wir können nun den zweiten Hauptstrahl so wählen, dass einer seiner Ordnungspunkte auf p liegt. Der so bestimmten Fläche R^2 entspricht eine Fläche R_1^4, welche eine doppelte Erzeugende p_1 ausser den Doppellinien s_1 und t_1 enthält.

§ 11. Ueber die Fläche in Σ_1, welche einer Fläche n. Ordnung von Σ entspricht.

Einer beliebig gegebenen Fläche F^n n^{ter} Ordnung von Σ entspricht eine Fläche F_1^{3n} $3.n^{ter}$ Ordnung in Σ_1, welche n der Regelschaar X_1^2 angehörige Gerade enthält. Denn weil F^n von einer Grundcurve eines F^2-Büschels von Σ in $3n$ Punkten getroffen wird, hat auch F_1^{3n} mit der homologen Geraden $3n$ Punkte gemein. Die n Geraden entsprechen den n Schnittpunkten von F^n mit der Basis b.

Die Fläche F_1^{3n} enthält eine Schaar von ebenen Curven n^{ter} Ordnung, welche nämlich den Curven n^{ter} Ordnung in den Ebenen des Büschels b entsprechen.

Der Fläche F^n ist eine Fläche F'^{5n} $5.n^{ter}$ Ordnung associirt, welche $3n$ mal durch b geht. Die Curve, in der sich diese

beiden Flächen schneiden, besteht aus einer Curve von der Ordnung $4n$ und einer zweiten von der Ordnung $5n.n-4n$. In der ersteren durchdringen sich die Kernfläche K^4 des Gebüsches und die Fläche F^n; dieselbe ist folglich der Ort aller sich selbst associirten Punkte auf F^n. Die letztere enthält alle Paare associirter Punkte von F^n.

Den ebenen Schnitten von F_1^{3n} entsprechen Curven von der Ordnung $2.n$.

F'^{5n} enthält $3n$ Gerade, welche Axen des Ebenenbüschels B^3 dritter Ordnung sind; sie schneiden die Basis zu dreien in dem nämlichen Punkte.

Enthält F^n die Basis b, so erniedrigt sich der Grad der correspondirenden Fläche um zwei Einheiten, der der associirten Fläche um vier Einheiten.